Física 2º Bachillerato

Campo central de fuerzas

Félix A. Gutiérrez Múzquiz

Contenidos

1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CAMPOS. CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

Lectura histórica

La teoría de los campos de Faraday y las que vinieron después ofrecían nuevas soluciones a un viejo problema que ya había sido planteado en tiempos de los antiguos griegos o incluso antes. El problema es cómo un cuerpo puede actuar sobre otro. La teoría ayuda a dar respuesta a alguna de las cuestiones más concretas, entre las que podrían citarse: ¿Por qué un cuerpo empuja a otro en vez de penetrar en él? ¿Por qué un imán es capaz de hacer que un trozo de hierro a cierta distancia se mueva? ¿Cómo es posible que un cuerpo electrizado haga que el polvo se mueva hacia él?. Otras cuestiones afines serían, por ejemplo, la causa de la combustión y la razón por la que algunos cuerpos cortan a otros.

Filósofos de la Grecia antigua, Tales, Demócrito y Platón por ejemplo, ya se habían hecho estas preguntas y propusieron algunas soluciones interesantes que implicaban teorías sobre la naturaleza del mundo. Demócrito, por ejemplo, decía que los cuerpos interactuaban por contacto entre sus átomos. Cuando el pensamiento griego fue recogido de nuevo en el Renacimiento, Descartes, Galileo y otros pensadores del siglo XVII mejoraron las teorías de los griegos y desarrollaron otras nuevas. Descartes lanzó la teoría de que el mundo está completamente lleno de materia y toda acción de un cuerpo sobre otro se realiza por contacto directo o indirecto. Pensaba que un imán actúa sobre un trozo de hierro a través de un flujo invisible de materia que sale del imán y vuelve a él. Sin embargo, el éxito iba a ser para otra teoría, aparecida a finales del siglo XVII y cuyo autor era Isaac Newton.

La teoría de Newton establecía que los cuerpos están formados por corpúsculos que actúan a distancia unos sobre otros instantáneamente. La intensidad de la acción depende del inverso del cuadrado de la distancia entre los cuerpos. Esta ley se aplicaba también a la gravitación, una fuerza que Newton suponía que existía entre todos los cuerpos, incluyendo los cuerpos celestes, los pequeños cuerpos en la Tierra y la Tierra propiamente dicha. Aplicando esta ley, Newton pudo calcular el movimiento de los planetas con gran aproximación y también deducir correctamente algunas leyes descubiertas por Kepler y Galileo. La teoría de Newton era sorprendentemente superior, en la predicción de nuevos resultados, a cualquier teoría precedente en la historia del pensamiento humano y conoció gran éxito en sus predicciones. Se convirtió en un punto de referencia que no podía ser ignorado por ninguna otra teoría posterior.

La teoría de Newton no predecía sin embargo nada sobre otros muchos modos de acción de un cuerpo sobre otro. No explicaba, por ejemplo, la cohesión, fuerza que mantiene unidos a los cuerpos, ni tampoco las fuerzas eléctricas, magnéticas o químicas. Aunque los continuadores de Newton lograron extender su teoría de la "acción a distancia" de la gravitación a otras fuerzas, a principios del siglo XIX empezaron a desarrollarse teorías de campos para explicar la acción de un cuerpo sobre otro. Lo que tienen de común las nuevas teorías de campos es que toda acción de un cuerpo sobre otro a cierta distancia se hace a través de un medio como sustrato de la interacción. En el caso de Faraday, este medio era simplemente la fuerza misma, mientras que para muchos otros el medio era como una sustancia sólida o viscosa que verificaba la ley de Newton y que se llamaba **éter**.

Es cierto que Laplace y otros habían desarrollado matemáticamente la teoría de Newton utilizando la idea de campos de fuerzas (y potenciales), pero utilizaba los campos como mero recurso matemático para calcular la fuerza ejercida por una serie de cuerpos sobre un objeto de prueba. Se suponía que sólo había fuerzas en puntos del espacio donde había materia. En cambio, las teorías de campos sostenían que los campos de fuerzas, o el éter, existe incluso allí donde no hay materia.

¿Se puede distinguir experimentalmente estos dos puntos de vista?. Como veremos, un experimento crucial lo iba a hacer posible. Las teorías de campos predecían que todas las acciones de un cuerpo sobre otro requerían un cierto tiempo, mientras que las teorías de acción a distancia decían que la acción era instantánea. Los teóricos partidarios de los campos veían en la finitud del tiempo de propagación de una acción una prueba evidente de que los campos existen en lugares donde no hay materia. La velocidad finita de propagación de los efectos de un cuerpo sobre otro distante es también una característica diferenciadora entre la teoría de Faraday y discípulos y la de Descartes.

La teoría de campos alcanzó su gran triunfo con el descubrimiento por Hertz de las ondas electromagnéticas hacia finales del siglo XIX. La existencia de las ondas demostró que la propagación de los efectos eléctrico y magnético dura un cierto tiempo, como ya predecía la teoría de campos. Fue precisamente entonces cuando aparecieron nuevas dificultades para esta teoría, dificultades que llevaron a la creación de dos nuevas teorías sobre las leyes básicas que gobiernan la acción de un cuerpo sobre otro: la relatividad y la teoría cuántica. La relatividad no es sino una teoría de campos, y cosechó su gran triunfo cuando se vio que la teoría relativista de la gravitación de Einstein superaba a la de Newton. Pero al mismo tiempo, la teoría de campos se veía socavada por la recién estrenada teoría cuántica, que niega que la materia o la energía se distribuyan continuamente a través del espacio, como quería la teoría de campos. La teoría de campos es el modelo más general del mundo que jamás se haya conocido. Ha tenido que soportar serios desafíos, pero todavía no ha sido superada por ningún modelo nuevo de altura similar.

[BERKSON, W., 1981, *Las teorías de los campos de fuerza. Desde Faraday hasta Einstein* (Alianza: Madrid)].

Actividad 1

[a] ¿Cuántas teorías o modelos se proponen en el texto anterior para explicar las interacciones de los cuerpos?
[b] ¿Qué característica fundamental diferencia a las teorías citadas?
[c] ¿Se describe algún experimento crucial a favor de alguna de las teorías?

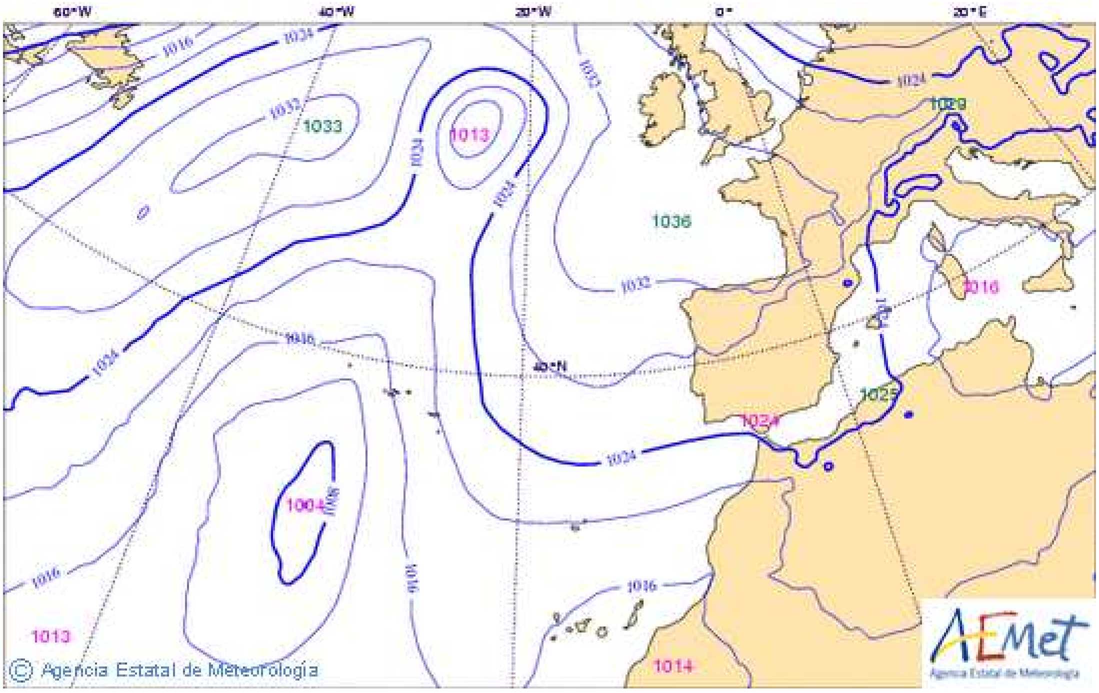
En una historieta de los héroes infantiles de los tebeos que lee la siguiente afirmación: *-¡Atención, capitán! No puedo controlar el rumbo de la nave. ¡Hemos entrado en un campo de fuerzas que nos succiona! ¡Ah!* Sabemos que el comportamiento de la nave se puede explicar aceptando que en esa región del espacio existe **una perturbación de las propiedades del medio** (o del vacío), esto es, suponiendo que en dicha región existen propiedades eléctricas, magnéticas, gravitatorias o de cualquier otro tipo, que hacen que la nave esté sometida a fuerzas. A la región del espacio que tiene determinadas propiedades físicas se le denomina **campo**. Cabe preguntarse entonces por el agente responsable de la perturbación, es decir, ¿quién crea el campo? En el ejemplo citado el agente es desconocido, aunque, en los casos reales, el campo es originado por sistemas de partículas.

Precisemos la idea de campo con un ejemplo. De acuerdo con la teoría de campos, un cuerpo cargado modifica las propiedades del espacio circundante. Esta región perturbada tiene ahora propiedades eléctricas y decimos que se ha creado un campo eléctrico, el cual se pone de manifiesto por la acción del campo sobre otras partículas cargadas (consideradas como 'testigos').

En general, siempre que en todos los puntos de una región del espacio se pueda asignar o definir el valor de una magnitud física, diremos que existe un campo. **Un campo es toda magnitud física que tiene un valor determinado en cada punto del espacio**.

Si la magnitud física definida en cada punto es una magnitud escalar, tendremos un **campo escalar**. Matemáticamente, estará descrito por una función del tipo ϕ= f(x,y,z). Ejemplos:

- **Campo de temperaturas** en el interior de la Tierra, representado por T = f(x,y,z). Más concretamente, se sabe la temperatura aumenta aproximadamente 1 ºC por cada 33 m de profundidad; dicho campo estará definido por $T = T_o + (z/33)$, siendo T_o la temperatura en la superficie y z la profundidad.
- **Campo de presiones** en la atmósfera: p = f(x,y,z).



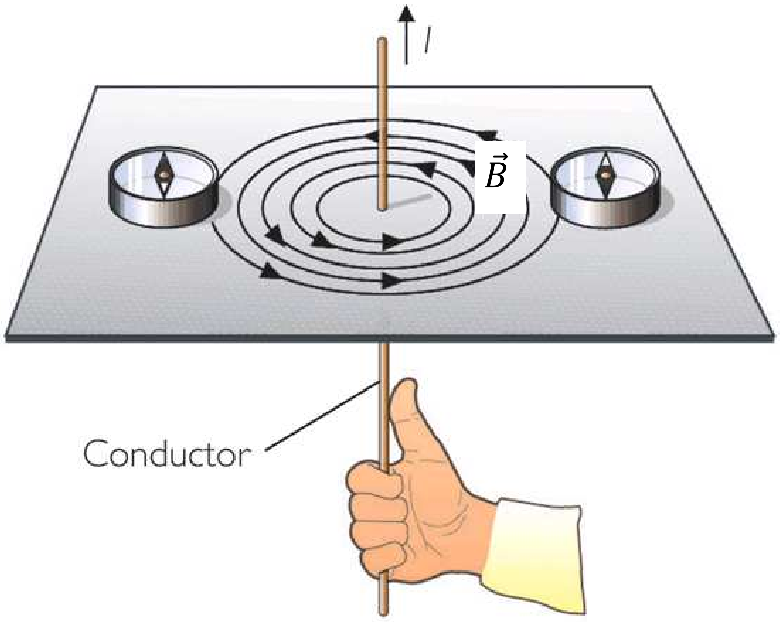
- **Campo de intensidad luminosa** alrededor de un foco de luz: I = f(x,y,z).
- **Campo de concentraciones** de un soluto alrededor de un cristal disolviéndose: c = f(x,y,z).

Si en cada punto del espacio se define una magnitud vectorial, tenemos un **campo vectorial**. Matemáticamente, estará descrito por tres funciones escalares, componentes de una función vectorial: $\vec{A}(x,y,z) = \begin{cases} A_x(x,y,z) \\ A_y(x,y,z) \\ A_z(x,y,z) \end{cases}$

Ejemplos:

- **Campo de velocidades** de un fluido que circula por una tubería, representado por $\vec{v}$(x,y,z).
- **Campo de fuerzas gravitatorias** en torno a un planeta: $\vec{F}$(x,y,z).

- **Campo eléctrico** alrededor de un cuerpo cargado: $\vec{E}$(x,y,z).
- **Campo magnético** en las proximidades de una corriente eléctrica: $\vec{B}$(x,y,z).



Entre los campos vectoriales son especialmente importantes los **campos de fuerzas**. Se dice que en cierta región del espacio existe un campo de fuerzas cuando en todo punto de la misma hay definida una fuerza que toma un valor diferente para cada punto.

¿Cómo poner de manifiesto la existencia de un campo de fuerzas?. Es preciso colocar en el punto correspondiente un **agente sensible** (o testigo) de naturaleza adecuada a la de la fuerza. Por ejemplo, para detectar un campo gravitatorio se precisa una partícula de masa m; para un campo electrostático, una partícula cargada; para un campo magnético, una carga en movimiento, etc. En consecuencia, la fuerza que actúa sobre una partícula dependerá, no sólo de las características del campo de fuerzas, sino también del agente sensible. La fuerza que la Tierra ejerce sobre una manzana depende del campo gravitatorio terrestre y de la masa de la manzana. Matemáticamente, esto se expresa mediante $\vec{F}$(x,y,z,k), donde k indica el valor del agente sensible.

Los campos de fuerzas se suelen caracterizar por la llamada **intensidad de campo**, definida en cada punto como la fuerza por unidad de agente sensible situado en dicho punto, es decir, $\frac{\vec{F}(x,y,z,k)}{k}$.

Todos los campos mencionados anteriormente pertenecen a la categoría de **campos estáticos**, ya que no dependen del tiempo. En general, un campo es función de la posición y del tiempo.

2. CAMPOS CONSERVATIVOS

Antes de abordar el concepto de campo conservativo vamos a desarrollar la idea de trabajo realizado por una fuerza variable.

Supongamos que la fuerza es una función de la posición, es decir, que depende, en general, de las tres coordenadas del punto: x,y,z. El cálculo del trabajo se realiza descomponiendo el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ en desplazamientos infinitesimales $d\vec{r}$ (fig. 1), en cada uno de los cuales la fuerza $\vec{F}(x,y,z)$ puede ser considerada prácticamente constante. El trabajo infinitesimal dW en cada uno de estos desplazamientos se calcula mediante la conocida expresión del trabajo de una fuerza constante: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$, donde se ha sustituido $d\vec{r}$ por $d\vec{s}$. Nótese que $d\vec{r}$ tiene la dirección de la cuerda y $d\vec{s}$ la dirección del arco.

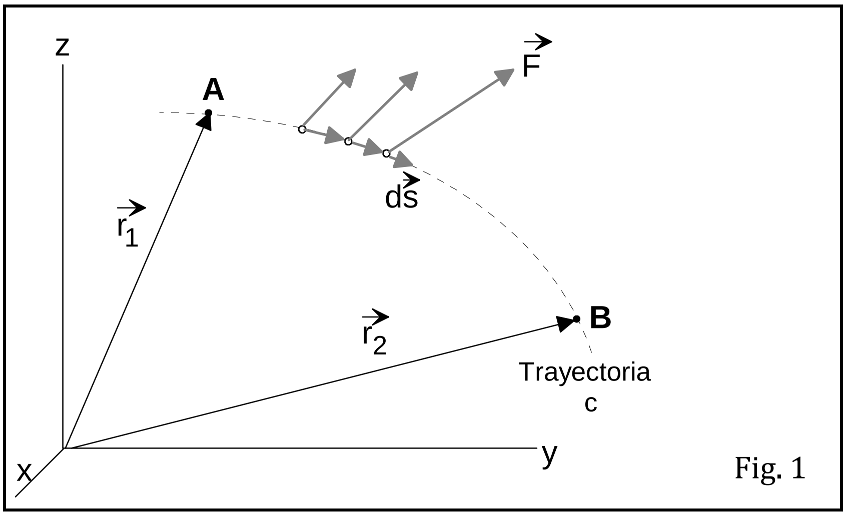


Fig. 1

El trabajo total entre dos puntos A y B será, entonces, la suma de todos los trabajos infinitesimales. Esta suma, que consta de infinitos sumandos es, matemáticamente, la integral definida entre los puntos A y B:

$$W_{A \to B,c} = \Sigma \, dW = \int_{A,c}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad (1)$$

Este tipo de integrales recibe el nombre de **integrales de línea** o **curvilíneas**; su valor depende de la función F que se integra, de los puntos inicial A y final B y de la trayectoria c seguida por la partícula sobre la que actúa la fuerza. A diferencia de lo que ocurría con el trabajo de una fuerza constante, el trabajo realizado por una fuerza variable depende de la trayectoria seguida.

Generalmente, el cálculo de la integral (1) se efectúa mediante las componentes de los vectores $\vec{F}$ y . Como:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \quad \text{y} \quad d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

la integral curvilínea que hay que calcular es:

$$W_{A \to B,c} = \int_{A,c}^{B} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (2)$$

Acabamos de ver que el trabajo entre dos puntos asociado a un campo de fuerzas depende de la trayectoria seguida entre dichos puntos. Existen, sin embargo, unas fuerzas -o campos de fuerzas- para los cuales no se cumple dicha restricción: son los llamados **campos conservativos**.

2.1. Concepto

Un campo de fuerzas $\vec{F}$(x,y,z) es **conservativo** cuando el trabajo realizado por las fuerzas del campo al actuar sobre una partícula que se desplaza desde un punto inicial A hasta otro punto final B, no depende del camino seguido para ir de A a B. Se debe verificar (fig. 2) que

$$W_{A \to B,c_1} = W_{A \to B,c_2} = W_{A \to B,c_3} = \ldots = W_{A \to B,c_n}$$

A partir de esta definición se deduce que es nulo el trabajo realizado por las fuerzas conservativas sobre una partícula cuando ésta recorre una trayectoria cerrada o ciclo. En efecto, en la fig.

2, un ciclo sería, por ejemplo, ir de A a B por la trayectoria c_1 y de B a A por la c_2', que es la misma trayectoria c_2 recorrida en sentido contrario; se cumpliría entonces que:

$$W_{ciclo} = W_{A\to B,c_1} + W_{B\to A,c_2'} = W_{A\to B,c_1} - W_{A\to B,c_2} = 0$$

ya que, al cambiar el sentido del desplazamiento en el cálculo del trabajo, cambia el signo de esta magnitud.

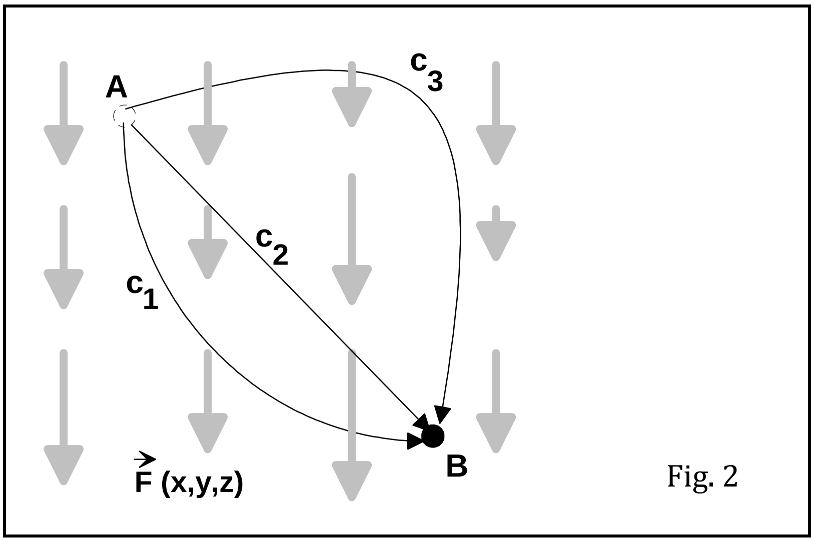


Fig. 2

Actividad 2

Para cada una de las siguientes situaciones, indica en qué casos el trabajo realizado depende del camino seguido.

[a] Una ama de casa clavando una alcayata para colgar un cuadro.
[b] Miguel arrastrando una pesada caja por el pasillo de su casa -al tiempo que raya la tarima barnizada-.
[c] Un obrero elevando cajas de fruta hasta la plataforma de un camión.
[d] La misma caja del apartado anterior cayéndose al suelo.
[e] Un electrón girando alrededor del núcleo atómico.

2.2. Energía potencial

Si el campo es conservativo, el trabajo realizado por las fuerzas del mismo está determinado únicamente por los puntos inicial y final. Se introduce por ello una magnitud muy importante llamada **energía potencial**, representada por U, de tal manera que:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = U(A) - U(B) = -[U(B) - U(A)] = -\Delta U \qquad (3)$$

La energía potencial U(x,y,z) es una función de las coordenadas de la posición tal que la diferencia entre sus valores en las posiciones inicial y final es igual al trabajo efectuado sobre la partícula al moverla de su posición inicial a la final.

Nótese que si el trabajo de A a B es positivo, la variación de la energía potencial es negativa y la energía potencial disminuye; esto es debido a que el trabajo ha sido realizado por las fuerzas del campo. (Y si no, que se lo pregunten a un pintor de mástiles de banderas en caída libre hacia el suelo). Si el trabajo de A a B es negativo, la variación de la energía potencial es positiva y la energía potencial aumenta; el trabajo se ha efectuado contra las fuerzas del campo por un agente exterior. (Esto es lo que sucede al estirar una liga).

Mediante la ecuación (3) sólo pueden calcularse variaciones de energía potencial, pero no la energía potencial en un punto. Si se quiere calcular valores puntuales de la energía potencial es preciso fijar una posición como **origen** o **referencia**. Sean R el punto tomado como referencia, es decir, aquel en el que la energía potencial es nula, y P un punto cualquiera en el que queremos calcular la energía potencial; la ecuación (3) se escribirá en este caso:

$$W_{R\to P}=\int_R^P \vec{F}\cdot d\vec{s}=U(R)-U(P) \qquad (4)$$

de donde se deduce, ya que U(R) = 0, que:

$$U(P)=-\int_R^P \vec{F}\cdot d\vec{s}=-\int_R^P (F_x dx+F_y dy+F_z dz) \qquad (5)$$

es decir, la energía potencial en un punto cualquiera es igual, con signo "-", al trabajo realizado por las fuerzas del campo para mover la partícula desde el punto de referencia hasta dicho punto.

La elección del punto de referencia para la energía potencial es totalmente arbitraria. Naturalmente, la forma matemática de la función energía potencial es distinta para cada elección -ecuación (5)-; sin embargo, las variaciones de la energía potencial -ecuación (4)- no dependen del punto de referencia. A menudo es conveniente escoger la posición de referencia R como aquella en la que la fuerza que actúa sobre la partícula es cero. Por ejemplo, la fuerza ejercida por un resorte es cero cuando el resorte tiene su longitud normal, relajado; con frecuencia, se dice que la energía potencial también es cero en esa situación.

2.3. Ejemplos de interés

➨ **Campo gravitatorio en las proximidades de la Tierra**

Cuando una partícula de masa m se introduce en ese campo se ve sometida a una fuerza vertical y hacia abajo, de módulo *mg*; por lo tanto, este campo se puede expresar matemáticamente mediante: $\vec{F}=-mg\vec{k}$. El trabajo realizado por esa fuerza entre los puntos $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$, cualquiera que sea la trayectoria seguida entre ambos, teniendo en cuenta que las componentes F_y y F_z son nulas, es:

$$W_{A\to B}=-mg\int_{z_1}^{z_2} dz=-mg(z_2-z_1)$$

de donde se deduce que este trabajo depende únicamente de los puntos inicial y final; en consecuencia, se trata de un campo conservativo.

El paso siguiente es obtener una expresión para la energía potencial asociada a este campo. Aplicamos la ecuación (5) tomando como referencia la posición dada por z = 0:

$$U(z)=-\int_R^P -mgdz=mg\int_0^z dz=mgz \qquad (6)$$

expresión conocida de curso anteriores.

➨ **Campo de fuerzas elásticas**

Supongamos que un muelle verifica la ley de Hooke, por lo que la expresión matemática de este campo es $\vec{F}(x)=-kx\vec{i}$, siendo x la deformación del muelle. El trabajo realizado por este campo unidimensional entre los puntos $A(x_1)$ y $B(x_2)$ es:

$$W_{A\to B} = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

resultado que sólo depende de los puntos inicial y final; por lo tanto, este campo también es conservativo.

La energía potencial, que ahora se califica como **elástica**, se obtiene, si se toma como referencia la posición x = 0, mediante:

$$U(x) = -\int_0^x -kx dx = k\int_0^x x dx = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (7)$$

Actividad 3

[a] Una caja pesada es arrastrada por el suelo desde el punto A hasta el punto B. ¿Será distinto el trabajo de la fuerza de rozamiento si la caja es impulsada a lo largo de una trayectoria en zig-zag en lugar de seguir la distancia más corta entre A y B? ¿Por qué?
[b] La fuerza de rozamiento, ¿es conservativa? Justifica tu respuesta.

Actividad 4

[a] Representa gráficamente la energía potencial gravitatoria de una partícula de 1,0 kg de masa en función de su altura sobre el suelo, tomado como nivel de referencia.
[b] En la misma gráfica representa también la energía potencial gravitatoria pero tomando como nivel de referencia la altura de 4,0 m.

Actividad 5

Un muelle de constante k = $1{,}0\cdot10^4$ N/m obedece a la ley de Hooke. ¿Cuánto debe deformarse para que su energía potencial elástica sea: [a] 100 J; [b] 50 J?

{Respuesta: [a] 0,14 m; [b] 0,10 m}

Actividad 6

Deduce la expresión matemática de la energía potencial asociada a la fuerza conservativa $\vec{F} = -4\vec{i}$ (N) en los siguientes casos:
[a] Para una elección arbitraria del nivel de referencia.
[b] De modo que U = 0 para x = 6 m.
[c] De modo que U = 12 J para x = 6 m.

{Respuesta: [b] U = 4x-24 (J); [c] U = 4x-12 (J)}

3. NUEVAS MAGNITUDES PARA UNA PARTÍCULA

3.1. Momento angular

Las leyes de Newton y la aplicación del cálculo infinitesimal a la resolución de problemas mecánicos dieron lugar, en el siglo y medio siguiente a la época de Newton, a la consolidación de la llamada **mecánica teórica**. En el desarrollo de esta parte de la Física son destacables las aportaciones de **J. Bernouilli** (1667-1748) y de **L. Euler** (1701-1783). En este contexto debe entenderse la introducción de los conceptos que se presentan seguidamente, los cuales no se han definido para tormento de los estudiantes, sino que su utilidad se verá más adelante al hablar de campos de fuerza centrales.

El **momento angular** o **cinético** de una partícula respecto a un punto O (fig. 3) se define como el producto vectorial de su vector de posición, medido en el sistema de referencia elegido, por su momento lineal o cantidad de movimiento, esto es:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad (8)$$

Es una magnitud vectorial cuyo módulo se calcula mediante: $L_o = rmv\ sen\ \theta$, donde θ es el ángulo formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$; la dirección del momento angular es perpendicular al plano determinado por $\vec{r}$ y $\vec{p}$; y su sentido se obtiene mediante la *regla del tornillo*: se acepta como sentido del momento angular el de avance de un tornillo que se hace girar en el sentido de $\vec{r}$ hacia $\vec{p}$ por el camino más corto (fig. 3). ¿Cuáles son las unidades del momento angular en el SI?

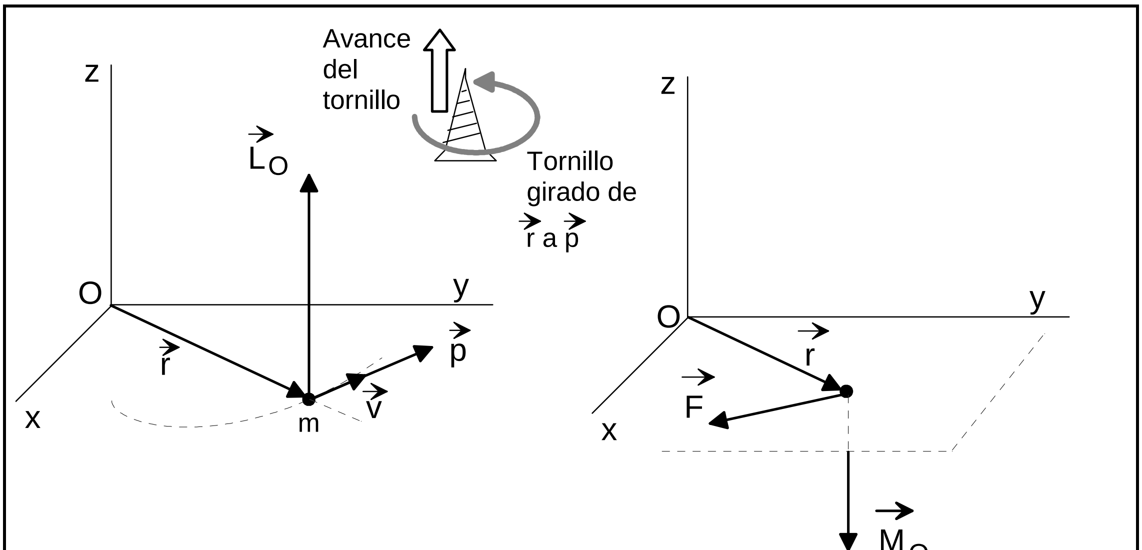


Fig. 3 Fig. 4

3.2. Momento de una fuerza

Introduzcamos ahora un nuevo concepto físico. Se define el **momento de una fuerza** respecto a un punto O (fig. 4) como el producto vectorial del vector que une el punto O con el origen de la fuerza por la fuerza, esto es:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (9)$$

Se trata también de una magnitud vectorial y, al igual que el momento angular, depende del punto específico del espacio respecto al que se calcula. En el SI, se mide en *metro multiplicado por julio*.

Vamos a demostrar ahora que estas dos magnitudes no son independientes, sino que existe una relación matemática entre ellas. Al derivar la ecuación (8) respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (10)$$

El primer sumando de la ecuación (10) es cero, ya que se trata del producto vectorial de dos vectores de la misma dirección: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ y $\vec{p} = m\vec{v}$.

El segundo sumando de la ecuación (10) se puede escribir de otra manera; en efecto, $\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r}\times m\vec{a} = \vec{r}\times\vec{F}_{neta} = \vec{M}_O$. En consecuencia, la ecuación (10) se transforma en:

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \qquad (11)$$

donde los vectores momento angular y momento de la fuerza están referidos al mismo punto O. La ecuación (11) establece que:

El momento resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a la variación temporal de su momento angular.

Actividad 7

Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

[a] ¿Cuál es el ángulo formado por el momento lineal $\vec{p}$ de una partícula y su momento angular $\vec{L}_O$?

[b] Una partícula libre, que es la que se mueve con velocidad constante, tiene un momento angular nulo respecto a un punto determinado. Demuestra que la partícula ha pasado por dicho punto o pasará por él.

[c] Dos partículas, A y B, se mueven sobre líneas rectas paralelas separadas por una distancia d. Poseen la misma rapidez pero se mueven en sentidos opuestos. ¿Cuál es el módulo del momento angular de A respecto de un punto situado en su propia trayectoria? ¿Y con respecto a un punto situado en la trayectoria de B? ¿Y respecto a la partícula B?

De la ecuación (11) se deduce que:

Si el momento de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula es nulo, su momento angular permanece constante.

Enunciado que se conoce como **teorema de conservación del momento angular** para una partícula.

Actividad 8

Analiza bajo qué condiciones se cumplirá el teorema anterior.

4. CAMPOS CENTRALES: DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS

Se dice que un campo de fuerzas es **central** cuando la dirección de la fuerza, definida en cada punto de la región de existencia del campo, pasa siempre por un punto fijo O, denominado centro de fuerzas (fig. 5).

Cuando las fuerzas centrales presentan simetría esférica, esto es, cuando tienen el mismo valor en todos los puntos situados a una distancia dada de O, se expresan matemáticamente mediante:

$$\vec{F}(r) = f(r)\vec{u}_r \qquad (12)$$

siendo $\vec{u}_r$ un vector unitario en dirección radial y sentido hacia afuera. La fuerza central es de **atracción** o de **repulsión** respecto a O si f(r)>0 o f(r)<O, respectivamente (fig. 5a y 5b).

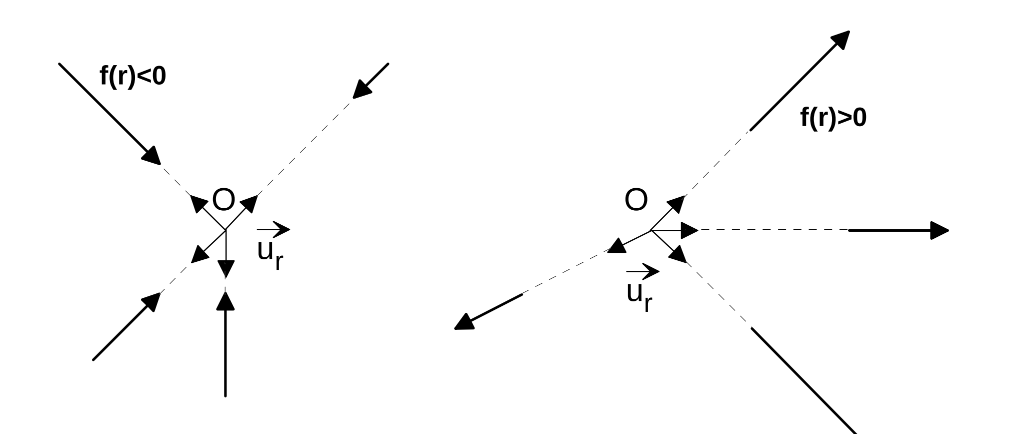


Fig. 5a Fig. 5b

Veamos ahora, a partir de la definición, qué consecuencias se derivan para una partícula que se mueva en el seno de un campo central de fuerzas:

➡ **El momento angular de una partícula con respecto al centro de fuerzas en un campo central permanece constante.**

En la figura 6 se cumple que: $\vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times f(r)\vec{u}_r = f(r)(\vec{r}\times\vec{u}_r) = 0$, ya que los vectores $\vec{r}$ y $\vec{u}_r$ tienen la misma dirección. De acuerdo con la ecuación (10), $d\vec{L}_O/dt = 0$ y, en consecuencia, el momento angular $\vec{L}_O$ es constante; esto significa que, en el transcurso del tiempo, no cambia ni su módulo, ni su dirección, ni su sentido.

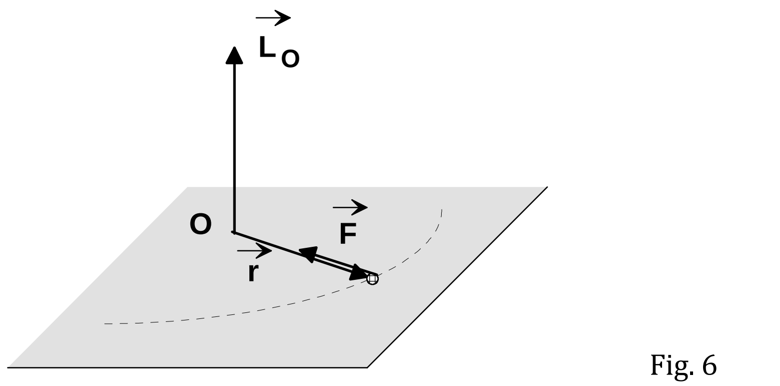


Fig. 6

➡ **La órbita o trayectoria de una partícula que se mueve en un campo central debe ser una curva plana, es decir, la partícula debe moverse en un plano.**

En efecto, que el vector $\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$ sea constante significa que, a lo largo del tiempo, tanto su módulo como su dirección y su sentido permanecen invariables. Si la dirección es fija, cualquier plano perpendicular a la misma también lo será (fig. 6). En particular, el plano que contiene a los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ habrá de mantener, pues, inalterable su orientación en el espacio. Esto quiere decir que $\vec{r}$ y $\vec{v}$ están siempre en el mismo plano y, obviamente, que la trayectoria descrita por la partícula es una curva plana.

➡ **La partícula se mueve de tal manera que el vector de posición, trazado desde O a la partícula, barre áreas iguales en tiempos iguales.**

Cuando la partícula sufre un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$, el vector de posición $\vec{r}$ barre una área triangular dA que es igual a la mitad del área del paralelogramo que se indica en la figura 7.

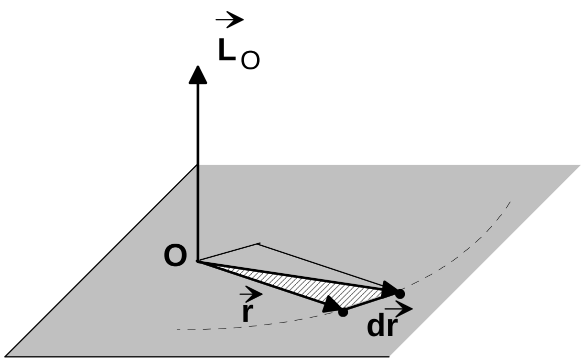


Fig. 7

Se cumple, por otro lado, que el módulo del producto vectorial de dos vectores equivale, geométricamente, al área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son dichos vectores. Así pues,

$$dA = \tfrac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}| = \tfrac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|dt \qquad (13)$$

Como $L_O = m|\vec{r} \times \vec{v}|$, la ecuación (13) se transforma en: $dA = \frac{L_O}{2m}dt$. De donde se deduce que el área barrida en la unidad de tiempo, $\frac{dA}{dt} = \frac{L_O}{2m}$, es constante, ya que la masa y el momento angular lo son; $\frac{dA}{dt}$ recibe el nombre de **velocidad areolar**. Esta consecuencia es de interés histórico, ya que, como veremos luego, constituye la llamada **2ª ley de Kepler**.

Si dejamos a un lado nuestra partícula moviéndose en un campo central, y nos concentramos en la propia fuerza, veremos que ésta posee otra característica de especial interés:

➡ **Las fuerzas centrales con simetría esférica son conservativas.**

Para demostrarlo, calculemos el trabajo realizado por las fuerzas del campo entre dos puntos A y B; cualquier trayectoria entre dichos puntos puede descomponerse en porciones infinitesimales en forma de escalones, que se dibujan alternativamente en direcciones radiales y circulares, éstas perpendiculares a aquéllas (fig. 8).

El trabajo realizado por la fuerza a lo largo de cualquier desplazamiento radial es $dW = f(r)dr$, mientras que en cualquier desplazamiento circular el trabajo es nulo, por ser la fuerza perpendicular al desplazamiento. Por lo tanto, el trabajo total realizado es igual a la suma de los trabajos infinitesimales correspondientes a los desplazamientos radiales, es decir,

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B f(r)\vec{u}_r \cdot d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} f(r)dr \qquad (14)$$

cuyo valor depende únicamente de los puntos inicial y final, y no de la trayectoria; en consecuencia, las fuerzas centrales con simetría esférica son conservativas.

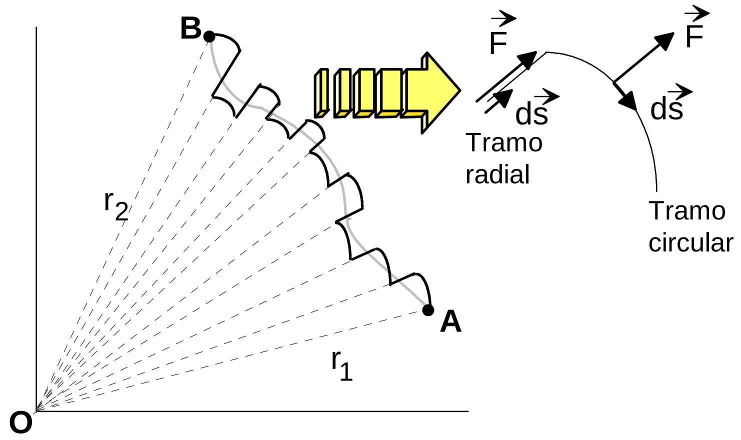


Fig. 8

Actividad 9

Imagina que quieres llegar a la cima de una montaña y que existen dos caminos: uno corto y de gran pendiente, y otro más largo pero de inclinación moderada. El trabajo que la fuerza gravitatoria realiza sobre tu cuerpo, ¿es diferente en ambos casos? Si no es así, ¿por qué se suele decir que la segunda vía es más fácil que la primera?

Actividad 10

Una partícula se mueve en el interior de un campo de fuerzas centrales. Entre las trayectorias dibujadas a continuación, señala las que, en ningún caso, pueden ser descritas por la partícula. El centro de fuerzas está representado por un punto.