



# Cinemática conceptual y cinemática aplicada

8 modelos con la hoja de cálculo "Excel"

**Félix A. Gutiérrez Múzquiz**  
Departamento de Física y Química  
I.E.S. Élaios  
Zaragoza

# ÍNDICE

.....	
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	3
.....	
<b>1. CÁLCULO DE LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA</b> .....	4
.....	
<b>2. CÁLCULO DE LA ACELERACIÓN INSTANTÁNEA</b> .....	7
.....	
<b>3. ESTUDIO DE LOS MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS</b> .....	8
.....	
<b>4. ENCUENTROS Y ALCANCES</b> .....	9
.....	
<b>5. CAÍDA LIBRE Y LANZAMIENTO VERTICAL</b> .....	11
.....	
<b>6. ESTUDIO DE LOS MOVIMIENTOS EN EL PLANO</b> .....	13
.....	
<b>7. LANZAMIENTO DE PROYECTILES</b> .....	16

## INTRODUCCIÓN

---

En el ámbito educativo, las TIC no deben ser un fin en sí mismas, sino que constituyen en medio más, junto con los diálogos en el aula, las actividades de lápiz y papel, las diapositivas, los vídeos, las tizas de colores y las horas de estudio y reflexión, para conseguir que los estudiantes alcancen una sólida formación y una buena educación.

Por ello, las actividades con las TIC que se presentan complementan a las que puedan realizarse con otros medios. La ventaja de las TIC radica en la rapidez con que se llevan a cabo los procesos y, por lo tanto, en la posibilidad de facilitar un grado de interacción muy superior al conseguido con otros medios, siempre que el estudiante tenga el talante adecuado.

Se ha elegido la hoja de cálculo porque esta herramienta informática está disponible en todos los centros de enseñanza y es de manejo sencillo. Se trata, por otro lado, de una herramienta *agradecida*: enseguida el usuario obtiene respuestas satisfactorias. En el presente caso, las actividades se han elaborado mediante la hoja de cálculo "Excel", que forma parte de "Microsoft Office".

Este material didáctico se refiere al estudio de los movimientos en una y dos dimensiones, los cuales se enmarcan, principalmente, en la asignatura de Física y Química de 1º de Bachillerato. De los ocho modelos que componen esta unidad, los dos primeros (*VelocidadInstantánea.xls* y *AceleraciónInstantánea.xls*) se emplean para la introducción de conceptos y el resto para la aplicación de los mismos. El hombre tardó varios siglos en comprender y manejar la idea de velocidad instantánea y no fue hasta la aparición del cálculo diferencial cuando pudo resolverse la cuestión. Sin llegar a tales extremos, nuestros estudiantes pueden aprender dicho concepto con la ayuda de los citados modelos.

Los modelos para la aplicación de los conceptos, además de contar con la ventaja de la inmediatez de los cálculos, permiten al estudiante adquirir las siguientes destrezas intelectuales:

- ▣ análisis de enunciados para adaptarlos a los modelos;
- ▣ interpretación de gráficas;
- ▣ realización de cálculos iterativos para la consecución de objetivos.

Cada uno de los modelos lleva asociadas la correspondiente explicación y varias actividades de aplicación. Pero la cosa no acaba ahí: el profesor o el alumno puede utilizarlos en la resolución de nuevos problemas.

Este material ha sido trabajado con alumnos, durante los últimos cinco años, en la asignatura de Tecnología de la Información de 1º de Bachillerato. Como dichos estudiantes también cursaban Física y Química de 1º de Bachillerato, el trabajo con los medios informáticos les ha servido para afianzar los conceptos científicos.

*Primavera de 2006*

## 1. CÁLCULO DE LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Hemos definido la **velocidad media** como el cociente entre el desplazamiento ( $\Delta x$ ) y el tiempo transcurrido durante el mismo ( $\Delta t$ ), esto es:

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Si un «Seat 600» color salmón recorre 54 km en 2 horas, su velocidad media es 54 km dividido por 2 h, es decir, 27 km/h ó 7,5 m/s. Pero ello no significa que en todo el recorrido haya mantenido dicha velocidad. En realidad, puede haber parado ante la luz roja de un semáforo, acelerando después para poder cubrir los 54 km en un total de 2 horas. En otras palabras, si el coche viajara a una velocidad constante igual a dicha velocidad media, recorrería el desplazamiento citado (54 km) en el susodicho tiempo (2 h).

El siguiente paso es definir el concepto de **velocidad instantánea**. Esta es el valor que leeríamos en el velocímetro del «Seat 600» en cualquier instante, pero ¿cuánto dura un instante? Para intentar determinar la velocidad instantánea habría que calcular la velocidad media durante el intervalo medible más corto posible.

Los eruditos medievales, al igual que nuestros alumnos en la actualidad, no pudieron definir de forma adecuada la velocidad instantánea debido a que no tenían ninguna idea del proceso de *paso al límite*. No tuvieron en cuenta que *el desplazamiento  $\Delta x$  se haría muy pequeño cuando  $\Delta t$  fuera también muy pequeño y, sin embargo, el cociente  $\Delta x/\Delta t$  permanecería con valor apreciable*. En otras palabras, el valor al que se aproxima la velocidad media durante intervalos de tiempo que se hacen cada vez más pequeños, sería la velocidad instantánea en ese momento. No importa lo rápido que se mueva un objeto; si el intervalo de tiempo que medimos es apreciablemente pequeño, el desplazamiento correspondiente será también muy pequeño. Tomemos como intervalo diminuto *una cienmillonésima de segundo* (0,00000001 s). Si en este breve tiempo un cuerpo se desplaza, digamos, *diez cienmillonésimas de metro* (0,0000001 m), está viajando a 10 m/s, que, para todos los efectos y propósitos, es su velocidad instantánea en ese momento.

(Tomado, en parte, de *Física en perspectiva*, de E. HECHT, 1987)

Por esta razón el modelo **VelocidadInstantánea.xls** está preparado para calcular la velocidad media en intervalos temporales cada vez más pequeños, para posteriormente hacer una estimación del **valor al que tiende la serie de velocidades medias**, valor que corresponderá a la **velocidad instantánea**. Después de que el usuario haya calculado varias velocidades instantáneas, el modelo traza la gráfica *velocidad/tiempo*.

### ⇒ Explicación del modelo

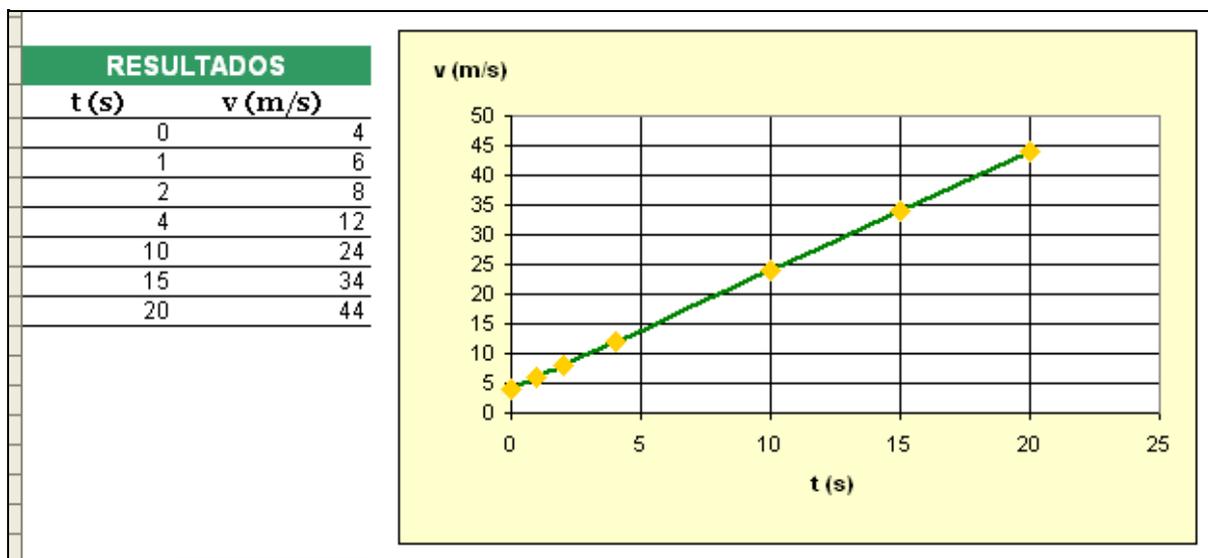
- ☐ Abre el libro de trabajo denominado VELOCIDADINSTANTÁNEA.XLS por la hoja MÓVIL 1. Observa que en la fila 2 se ha introducido la **ecuación del movimiento**, es decir, la expresión de la posición en función del tiempo.
- ☐ En el rango A4..C17 se calcula repetidamente la velocidad media en intervalos anteriores al instante de interés, haciendo que la amplitud de dichos intervalos tienda a cero. En el rango E4..G17 se hace lo mismo en intervalos posteriores al instante que interesa. Observa que en el intervalo [2 s, 3 s] la velocidad media es 9 m/s y que en el intervalo [3 s, 4 s] s la velocidad media es 11 m/s.

Instante anterior (s)	Desplazamiento (m)	Velocidad media (m/s)	INSTANTE DE INTERÉS (s)	Instante posterior (s)	Desplazamiento (m)	Velocidad media (m/s)
2,000000	9,000000	9,000000	3	4,000000	11,000000	11,000000

- ☐ En los siguientes intervalos [2,5 s, 3 s] y [3 s, 3,5 s], más breves, la velocidad media resulta ser 9,5 m/s y 10,5 m/s, respectivamente.

Instante anterior (s)	Desplazamiento (m)	Velocidad media (m/s)	INSTANTE DE INTERÉS (s)	Instante posterior (s)	Desplazamiento (m)	Velocidad media (m/s)
2,000000	9,000000	9,000000	3	4,000000	11,000000	11,000000
2,500000	4,750000	9,500000	3	3,500000	5,250000	10,500000

- ▣ A medida que descendemos en las columnas, con intervalos temporales más diminutos, observamos que la velocidad media se aproxima a un determinado valor; este límite será la velocidad instantánea para  $t=3$  s. ¿Cuál es la velocidad instantánea en ese momento? Los valores de la columna C sugieren que la velocidad media tiende a 10 m/s; los valores de la columna G indican asimismo que la velocidad media tiende a 10 m/s. En consecuencia, la velocidad instantánea para  $t=3$  s es 10 m/s.
- ▣ Para estimar el valor de la velocidad instantánea en otro momento basta con modificar el contenido de la celda D4. Calcula la velocidad instantánea para  $t = 0, 1, 2, 4, 10, 15$  y  $20$  s e introduce los valores de la velocidad a partir de la celda B22 (para  $t=0$  s no tiene sentido analizar el instante anterior). Se obtiene los resultados mostrados a continuación:



- ▣ El modelo incluye la gráfica *velocidad/tiempo*. La aceleración de este movimiento coincide con la pendiente de la recta mostrada:  $a = \frac{44-4}{20-0} = \frac{40}{20} = 2 \frac{m}{s^2}$ .
- ▣ Cierra el libro de trabajo sin guardar los cambios.

## ⇒ Actividad 1

- ▣ Accede a la hoja MÓVIL 2 del libro VELOCIDADINSTANTÁNEA.XLS y observa que la velocidad media no tiende hacia ningún valor, sino que permanece constante. La conclusión es que la velocidad instantánea para  $t=5$  s vale 3 m/s.
- ▣ Halla la velocidad instantánea para  $t = 0, 1, 2, 10, 25, 50$  y  $100$  s y recoge los resultados en la parte inferior de la hoja.
- ▣ En la gráfica *velocidad/tiempo* justifica por qué la aceleración es nula.

## ⇒ Actividad 2

- ▣ Accede a la hoja MÓVIL 3 del libro VELOCIDADINSTANTÁNEA.XLS.
- ▣ Calcula la velocidad en los instantes  $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$  y  $20$  s. Halla gráficamente el valor de la aceleración.

### ⇒ Actividad 3

---

- ☐ Accede a la hoja MÓVIL 4 del libro VELOCIDADINSTANTÁNEA.XLS.
- ☐ Calcula la velocidad en los instantes  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6$  s. Halla gráficamente el valor de la aceleración.
- ☐ ¿En qué instante el móvil se encuentra momentáneamente en reposo?
- ☐ ¿En qué intervalo de tiempo el móvil avanza en el sentido negativo del eje X? ¿Y en el sentido positivo de dicho eje?
- ☐ ¿En qué instante invierte el móvil el sentido del movimiento?

### ⇒ Actividad 4

---

- ☐ Accede a la hoja MÓVIL 5 del libro VELOCIDADINSTANTÁNEA.XLS.
- ☐ Calcula la velocidad en los instantes  $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25$  y  $30$  s. Halla, en la gráfica *velocidad/tiempo*, el valor de la aceleración.
- ☐ Mediante pruebas sucesivas busca, con la mayor aproximación posible, en qué instante el móvil se encuentra en reposo.
- ☐ Guarda el libro de trabajo con el nombre VEL\_INS5.

### ⇒ Actividad 5

---

- ☐ Accede a la hoja MÓVIL 6 del libro VELOCIDADINSTANTÁNEA.XLS.
- ☐ Calcula la velocidad en los instantes  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6$  s. Determina, en la gráfica *velocidad/tiempo*, el valor de la aceleración.
- ☐ Discute si el móvil invierte o no su sentido de movimiento.

### ⇒ Actividad 6

---

- ☐ Accede a la hoja MÓVIL 7 del libro VELOCIDADINSTANTÁNEA.XLS.
- ☐ Calcula la velocidad en los instantes  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6$  s.
- ☐ Obtén la gráfica *velocidad/tiempo*. Justifica si la aceleración es constante o variable.

### ⇒ Actividad 7

---

Clasifica los movimientos estudiados en las actividades anteriores en *uniformes* y *uniformemente variados*. ¿Tienes dificultades para clasificar algún movimiento? Escribe también el valor de la aceleración.

	Tipo de movimiento rectilíneo	Aceleración ( $m/s^2$ )
<b>Móvil 1</b>		
<b>Móvil 2</b>		
<b>Móvil 3</b>		
<b>Móvil 4</b>		
<b>Móvil 5</b>		
<b>Móvil 6</b>		
<b>Móvil 7</b>		

## 2. CÁLCULO DE LA ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

---

El cálculo de la **aceleración instantánea** presenta las mismas dificultades conceptuales que las indicadas en el caso de la velocidad instantánea. Por esta razón el modelo **AceleraciónInstantánea.xls** está preparado para calcular la aceleración media en intervalos temporales cada vez más pequeños, para posteriormente hacer una estimación del **valor al que tiende la serie de aceleraciones medias**, valor que corresponderá a la **aceleración instantánea**. Después de que el usuario haya calculado varias aceleraciones instantáneas, el modelo traza la gráfica *aceleración/tiempo*.

### ⇒ Explicación del modelo

---

- ☐ Abre el libro de trabajo denominado ACELERACIÓNINSTANTÁNEA.XLS por la hoja MÓVIL 1. Observa que en la fila 2 se ha introducido la **ecuación de la velocidad**, es decir, la expresión de la velocidad en función del tiempo.
- ☐ En el rango A4..C17 se calcula repetidamente la aceleración media en intervalos anteriores al instante de interés, haciendo que la amplitud de dichos intervalos tienda a cero. En el rango E4..G17 se hace lo mismo en intervalos posteriores al instante que interesa. Observa que en el intervalo [2 s, 3 s] la aceleración media es  $4 \text{ m/s}^2$  y que en el intervalo [3 s, 4 s] la aceleración media es  $4 \text{ m/s}^2$ .
- ☐ En los siguientes intervalos [2,5 s, 3 s] y [3 s, 3,5 s], más breves, la aceleración media también resulta ser  $4 \text{ m/s}^2$ .
- ☐ A medida que descendemos en las columnas, con intervalos temporales más diminutos, observamos que la aceleración media es constante ( $4 \text{ m/s}^2$ ); este valor será la aceleración instantánea para  $t=3 \text{ s}$ .
- ☐ Para estimar el valor de la aceleración instantánea en otro momento basta con modificar el contenido de la celda D4. Calcula la aceleración instantánea para  $t = 0, 1, 2, 4, 12, 20$  y  $30 \text{ s}$  y comprueba que siempre se obtiene el mismo valor.
- ☐ Cierra el libro de trabajo sin guardar los cambios.

### ⇒ Actividad 8

---

- ☐ Accede a la hoja MÓVIL 2 del libro ACELERACIÓNINSTANTÁNEA.XLS.
- ☐ Halla la aceleración instantánea para  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6 \text{ s}$  y recoge los resultados en la parte inferior de la hoja.
- ☐ ¿De qué tipo de movimiento se trata? ¿Por qué?

### ⇒ Actividad 9

---

- ☐ Accede a la hoja MÓVIL 3 del libro VELOCIDADINSTANTÁNEA.XLS.
- ☐ Calcula la aceleración en los instantes  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6 \text{ s}$  y recoge los resultados en la parte inferior de la hoja.
- ☐ La aceleración ¿es constante o variable? ¿De qué tipo de movimiento se trata?
- ☐ ¿En qué instante la aceleración es nula?

### ⇒ Actividad 10

---

- ☐ Accede a la hoja MÓVIL 4 del libro VELOCIDADINSTANTÁNEA.XLS.
- ☐ Calcula la aceleración en los instantes  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6 \text{ s}$ .
- ☐ La aceleración ¿es constante o variable? ¿De qué tipo de movimiento se trata?

### 3. ESTUDIO DE LOS MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS

El modelo de libro de trabajo de nombre **MovimientoRectilíneo.xls** está diseñado para el estudio de los movimientos rectilíneos. Hay que introducir, en el rango C4:C6, las condiciones iniciales del movimiento (posición, velocidad y aceleración) y la hoja realiza los cálculos pertinentes y traza las gráficas *posición/tiempo* y *velocidad/tiempo*. Si se quiere delimitar el estudio, se ha de introducir el incremento temporal (celda F6) y el primer instante de interés (celda A9). Para el análisis puedes utilizar tanto la **tabla de valores** como los **gráficos asociados**.

#### ⇒ Explicación del modelo

- ☐ Abre el libro de trabajo MOVIMIENTORECTILÍNEO.XLS. Vemos que la posición inicial es -100 m, la velocidad inicial 7 m/s y la aceleración nula.
- ☐ ¿En qué instante, aproximadamente, pasa el móvil por el sistema de referencia ( $x = 0$  m)? En la tabla de valores observamos que la posición cambia de signo entre los instantes 14 s ( $x = -2$  m) y 15 s ( $x = 5$  m). Luego en algún instante del intervalo [14 s, 15 s] pasará por el sistema de referencia. Introduce en la celda A9 el valor 14 s y modifica el valor del *incremento de tiempo* a 0,1 s (celda F6).
- ☐ Vemos ahora que la posición cambia de signo entre los instantes 14,20 s ( $x = -0,6$  m) y 14,30 s ( $x = 0,1$  m). Por lo tanto, en algún instante del intervalo [14,20 s, 14,30 s] pasará el móvil por el sistema de referencia. Pongamos 14,20 s como primer valor del intervalo objeto de estudio y 0,01 s como incremento temporal.
- ☐ Concluimos que el instante  $t = 14,29$  s es la mejor aproximación para la respuesta buscada.
- ☐ Cierra el libro sin guardar los cambios.

#### ⇒ Actividad 11

- ☐ Abre el libro de trabajo MOVIMIENTORECTILÍNEO.XLS e imagina que inicialmente el móvil se encuentra en reposo en el origen de coordenadas sometido a una aceleración de 2 m/s<sup>2</sup>. Obtén la tabla de valores para un incremento de tiempo de 1 s. ¿De qué tipo de movimiento se trata? ¿Por qué?
- ☐ Supón ahora que la velocidad inicial es -10 m/s. ¿En qué intervalo de tiempo el móvil se encuentra en la parte negativa del eje X? ¿En qué intervalo de tiempo el móvil se mueve hacia la izquierda en el eje X? ¿En qué instante el móvil invierte su sentido de movimiento? [Respuesta: [0, 10 s]; [0, 5 s]; 5 s]

#### ⇒ Actividad 12

Dado el movimiento caracterizado por: *posición inicial*, -120 m; *velocidad inicial*, 0 m/s; *aceleración*, 4,5 m/s<sup>2</sup>, deduce:

- ☐ el sentido del movimiento;
- ☐ los instantes en los que la velocidad es nula;
- ☐ el momento en el que el móvil pasa por el sistema de referencia. Emplea el procedimiento de aproximaciones sucesivas y confirma el resultado con la gráfica correspondiente. [Respuesta: 7,30 s]

#### ⇒ Actividad 13

Dado el movimiento caracterizado por: *posición inicial*, 20 m; *velocidad inicial*, 15 m/s; *aceleración*, -3 m/s<sup>2</sup>, deduce:

- ☐ ¿En qué instante y posición el móvil se encuentra momentáneamente en reposo? [Respuesta: 5 s; 57,50 m]
- ☐ ¿En qué instante el móvil pasa por el sistema de referencia? [Respuesta: 11,19 s]

- ☐ Explica cómo se ha comportado el móvil.

## 4. ENCUENTROS Y ALCANCES

---

Los modelos de libros de trabajo que vas a utilizar te permitirán resolver problemas de móviles en dos casos: **encuentros** y **alcances**. Con el primer modelo, **Encuentros1.xls**, supondremos que los movimientos son rectilíneos y uniformes. Es preciso especificar la posición inicial y la velocidad de cada uno de los móviles (rango B3:C4) y modificar paulatinamente el incremento temporal (celda B5) hasta dar con la solución.

### ⇒ Explicación del modelo

---

- ☐ Abre el libro de trabajo ENCUENTROS1.XLS y observa que los datos introducidos corresponden al siguiente enunciado: *Dos poblaciones A y B distan 400 km. A las nueve de la mañana sale de A hacia B un camión con una velocidad de 80 km/h. Simultáneamente, un coche sale de B hacia A a 100 km/h ¿A qué hora se cruzan?* Se ha tomado como sistema de referencia la ciudad A, por lo que la posición inicial del móvil que parte de B es 400 km; además, como este móvil se está moviendo hacia la izquierda su velocidad será -100 km/h.
- ☐ Cuando los móviles se encuentran o cuando uno alcanza al otro, las posiciones de ambos coinciden, situación que corresponde al punto de intersección de las dos rectas del gráfico *posición-tiempo*. Vemos que el encuentro ocurre cuando han transcurrido entre dos horas y dos horas y cuarto y a más de 160 km de la ciudad A. Podemos precisar más la respuesta si elegimos un rango temporal que tenga más interés y si modificamos el incremento temporal; por ejemplo, escribe 2 en la celda A9 y 0,1 en la celda B5. Se observa que el encuentro sucede entre los instantes  $t = 2,20$  h y  $t = 2,30$  h.
- ☐ Para conseguir una mejor aproximación, escribe 2,20 en la celda A9 y 0,01 en la celda B5. Tanto en el gráfico como en la tabla de valores vemos que el encuentro tiene lugar en el instante  $t = 2,22$  h (esto es, a las once horas trece minutos de la mañana) a 178 km de la población A.
- ☐ Cierra el libro sin guardar los cambios.

### ⇒ Actividad 14

---

Un ciclista profesional, entrenándose, avanza por una carretera a una velocidad de 35 km/h. Más adelante, a 20 km, un cicloturista se mueve en el mismo sentido a 13 km/h ¿Cuánto tarda el primero en alcanzar al segundo?

- ☐ Abre el libro de trabajo ENCUENTROS1.XLS, analiza el enunciado y determina cuál es el móvil 1 y cuál el móvil 2 ¿Dónde eliges el sistema de referencia?
- ☐ Introduce los datos del problema e investiga mediante aproximaciones sucesivas cuál será la solución. [Respuesta: Al cabo de 0,91 h, casi 55 min]

### ⇒ Actividad 15

---

Un tren de mercancías parte de una estación con una velocidad de 120 km/h. Una hora y media más tarde, un convoy tipo AVE sale de la misma estación a 290 km/h por una vía paralela. Calcula el tiempo que tarda el segundo en alcanzar al primero y la distancia recorrida hasta lograrlo. ¿Qué distancia separa a ambos trenes a las tres horas de iniciado el movimiento del tren de mercancías?

- ☐ Abre el libro de trabajo ENCUENTROS1.XLS, analiza el enunciado y determina cuál es el móvil 1 y cuál el móvil 2 ¿Dónde eliges el sistema de referencia?
- ☐ Introduce los datos del problema e investiga mediante aproximaciones sucesivas cuál será la solución. [Respuesta: Al cabo de 1,06 h de salir el AVE y a 307 km de la estación, aproximadamente; 75 km]

## ⇒ Actividad 16

---

Dos poblaciones, Zaragoza y Calahorra, distan 125 km. A las ocho de la mañana sale de Zaragoza hacia Calahorra un ciclista con una velocidad de 30 km/h. Una hora más tarde, una corredora de maratón parte de Calahorra, en el sentido hacia Zaragoza, con una velocidad de 20 km/h. ¿A qué hora se cruzan? ¿A qué distancia de Zaragoza lo hacen?

- ☐ Abre el libro de trabajo ENCUNTROS1.XLS, analiza el enunciado y determina cuál es el móvil 1 y cuál el móvil 2 ¿Dónde eliges el sistema de referencia?
- ☐ Introduce los datos del problema e investiga mediante aproximaciones sucesivas cuál será la solución. [Respuesta: A 87 km de Zaragoza, a las 10 h 54 min]

En el segundo modelo, **Encuentros2.xls**, supondremos que los movimientos son rectilíneos (uniformes y uniformemente acelerados). Es preciso, entonces, especificar la posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración de cada uno de los móviles (rango B3:C5) y modificar paulatinamente el incremento temporal (celda B6) hasta dar con la solución.

## ⇒ Explicación del modelo

---

- ☐ Abre el libro de trabajo ENCUNTROS2.XLS y observa que los datos introducidos corresponden al siguiente enunciado: *En el instante en que un semáforo se pone verde, un automóvil arranca en línea recta con una aceleración constante de  $3 \text{ m/s}^2$ . Al mismo tiempo, una camioneta pasa a la altura del semáforo con una rapidez constante de  $10 \text{ m/s}$ . Calcula a qué distancia del semáforo y en qué instante el automóvil dará alcance a la camioneta.* Se ha tomado como referencia el semáforo y el tiempo empieza a contar cuando se pone verde.
- ☐ Cuando el automóvil alcanza a la camioneta, las posiciones de ambos coinciden, situación que corresponde al punto de intersección de las dos rectas del gráfico *posición-tiempo*. Vemos que el alcance ocurre cuando ha transcurrido algo más de 6 s y a 60 m del semáforo, aproximadamente. Podemos precisar más la respuesta si elegimos un rango temporal que tenga más interés y si modificamos el incremento temporal; por ejemplo, escribe 6 en la celda A10 y 0,1 en la celda B6. Se observa que el alcance sucede alrededor del instante  $t = 6,50 \text{ s}$ .
- ☐ Para conseguir una mejor aproximación, escribe 6,50 en la celda A10 y 0,01 en la celda B6. Tanto en el gráfico como en la tabla de valores vemos que el encuentro tiene lugar en el instante  $t = 6,67 \text{ s}$  a  $66,7 \text{ m}$  del semáforo.
- ☐ Cierra el libro sin guardar los cambios.

## ⇒ Actividad 17

---

El maquinista de un tren, que avanza con una velocidad constante de 30 m/s, advierte delante de él, a una distancia de 500 m, la cola de un tren de mercancías que se mueve en el mismo sentido con una velocidad constante de 25 m/s. Frena entonces con una aceleración de  $0,025 \text{ m/s}^2$  ¿Chocará con el tren de mercancías?

- ☐ Abre el libro de trabajo ENCUNTROS2.XLS, analiza el enunciado y determina cuál es el móvil 1 y cuál el móvil 2 ¿Dónde eliges el sistema de referencia?
- ☐ Introduce los datos del problema e investiga mediante aproximaciones sucesivas cuál será la solución. [Respuesta: Lo alcanza a 5.500 m en el instante 200 s]

## ⇒ Actividad 18

---

En una obra en construcción, se tira verticalmente hacia arriba, desde una altura de 15 m, un martillo con una rapidez inicial de 40 m/s; en ese mismo instante, un montacargas, que se encuentra a 8 m de altura, está subiendo con una rapidez constante de 2 m/s. Si el martillo no puede ser detenido ¿a qué altura y en qué instante chocará con el montacargas?

- ▣ Abre el libro de trabajo ENCUENTROS2.XLS, analiza el enunciado y determina cuál es el móvil 1 y cuál el móvil 2 ¿Dónde eliges el sistema de referencia?
- ▣ Introduce los datos del problema e investiga mediante aproximaciones sucesivas cuál será la solución. [Respuesta: A 23,87 m en el instante 7,93 s]

### ⇒ Actividad 19

Dos ciclistas, que están separados 1.000 m sobre una pista rectilínea, inician simultáneamente sus movimientos uno al encuentro del otro. Uno de ellos parte del reposo con una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$ ; el otro, que es previamente empujado, se mueve a  $5 \text{ m/s}$  y acelera a razón de  $0,4 \text{ m/s}$  cada segundo. Determina en qué posición y en qué instante se cruzarán.

- ▣ Abre el libro de trabajo ENCUENTROS.123, analiza el enunciado y determina cuál es el móvil 1 y cuál el móvil 2 ¿Dónde eliges el sistema de referencia?
- ▣ Introduce los datos del problema e investiga mediante aproximaciones sucesivas cuál será la solución. [Respuesta: A 591 m del que parte del reposo y en el instante 34,4 s]

## 5. CAÍDA LIBRE Y LANZAMIENTO VERTICAL

El modelo de libro de trabajo **CaídaLibre.xls** está pensado para resolver este tipo de problemas. En la hoja DATOS hay que introducir las condiciones iniciales (rango C3:C5). De acuerdo con el sistema de referencia mostrado, las magnitudes vectoriales que apuntan hacia arriba se toman con signo + y las que señalan hacia abajo con signo -. Observa entonces que, con el sistema de referencia elegido, la aceleración es negativa, independientemente de si el cuerpo sube o baja. Las hojas POSICIÓN, VELOCIDAD y TRAYECTORIA contienen las gráficas *posición/tiempo* y *velocidad/tiempo* y el trazado de la trayectoria, respectivamente. Se consigue un efecto *zoom* modificando el contenido de la celda F6. Para el análisis puedes utilizar tanto la **tabla de valores** -hoja DATOS- como los **gráficos asociados** -hojas POSICIÓN, VELOCIDAD y TRAYECTORIA-.

### ⇒ Explicación del modelo

Desde lo alto de un campanario de 20 m de altura se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con una rapidez de  $40 \text{ m/s}$ . Se supone despreciable el rozamiento con el aire.

- a. ¿Qué altura máxima alcanza el objeto? ¿Qué tiempo emplea en lograrla?
- b. Halla la velocidad del objeto cuando vuelve a pasar por el punto de lanzamiento y el tiempo total empleado.
- c. Indica si el objeto se encuentra por encima o por debajo del punto de lanzamiento y si está subiendo o bajando en los instantes siguientes; 2, 4, 6, 8 y 10 s.

- ▣ Abre el libro de trabajo denominado CAÍDALIBRE.XLS y comprueba que se ha introducido los datos del enunciado.
- ▣ La altura máxima se alcanza cuando la velocidad es nula, cosa que sucede entre los instantes 4 s y 4,2 s. Para precisar más la respuesta se escribe 4 en la celda B10 y se cambia el incremento temporal (celda F6) a 0,01 s. Vemos que la altura máxima es de 101,63 m y que se ha alcanzado a los 4,08 s del lanzamiento.
- ▣ Cuando el objeto pasa de nuevo por el punto de lanzamiento se ha de cumplir que la posición es 20 m. Si introduces 0,4 como incremento temporal y 0 como instante inicial, se observa que dicha posición se logra entre los instantes 8 s y 8,4 s. También puedes utilizar la gráfica de la hoja POSICIÓN. Para precisar más la respuesta se escribe 8 en la celda B10 y se cambia el incremento temporal (celda F6) a 0,01 s. Vemos que la velocidad vale  $-40 \text{ m/s}$  y que el tiempo empleado es 8,16 s.
- ▣ Para contestar al último apartado establece 1 s como incremento temporal y 0 como instante inicial. De la tabla de valores se deduce: en el instante 2 s, el objeto se encuentra por encima y subiendo; en el instante 4 s, por encima y subiendo; a los 6 s, por

encima y bajando; a los 8 s, por encima y bajando; y en el instante 10 s, por debajo y bajando (si antes no se hubiera topado con el suelo).

- ▣ Cierra el libro de trabajo sin guardar los cambios.

## ⇒ Actividad 20

---

Desde una altura de 45 m, respecto al suelo, se deja caer un libro de Física y Química. Se considera despreciable la influencia del aire.

- ▣ Abre el libro de trabajo CAÍDALIBRE.XLS e introduce los datos iniciales de este movimiento.
- ▣ Halla la velocidad con que el libro llegará al suelo ¿Cuánto tiempo invertirá en dicho recorrido? *[Respuesta: 3,03 s, -29,7 m/s]*
- ▣ Repite el ejercicio suponiendo que el libro es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 15 m/s. *[Respuesta: 4,93 s, -33,3 m/s]*
- ▣ Repite el ejercicio considerando ahora que el libro es lanzado verticalmente hacia abajo con una rapidez de 15 m/s. *[Respuesta: 1,86 s, -33,2 m/s]*
- ▣ Para analizar los resultados contesta a las siguientes cuestiones: ¿Por qué los tiempos son diferentes en los tres casos? ¿Por qué la velocidad coincide en dos casos?

## ⇒ Actividad 21

---

Desde el borde de un precipicio de 180 m de altura sobre el mar se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con una rapidez inicial de 20 m/s.

- ▣ Abre el libro de trabajo CAÍDALIBRE.XLS e introduce los datos iniciales de este movimiento.
- ▣ ¿Dónde se encontrará al cabo de 5 s? *[Respuesta: Por debajo del punto de lanzamiento]*
- ▣ ¿Cuál es su velocidad en dicho instante? *[Respuesta: -29 m/s]*

## ⇒ Actividad 22

---

Desde una altura  $h$  se lanza verticalmente hacia abajo un cuerpo con una rapidez inicial de 5 m/s; el cuerpo invierte 6 s en llegar al suelo. Calcula el valor de  $h$ .

- ▣ Abre el libro de trabajo CAÍDALIBRE.XLS e introduce los datos iniciales de este movimiento. Ten en cuenta que uno de los datos iniciales ( $h$ ) es lo que tienes que calcular, por lo que deberás hacer pruebas sucesivas hasta que se cumplan las condiciones del enunciado. *[Respuesta: 206,4 m]*
- ▣ Halla la rapidez máxima que alcanzará el cuerpo. *[Respuesta: 63,8 m/s]*

## ⇒ Actividad 23

---

Galileo lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una rapidez inicial de 29,4 m/s.

- ▣ Abre el libro de trabajo CAÍDALIBRE.XLS e introduce los datos iniciales de este movimiento.
- ▣ ¿Qué altura alcanzará? *[Respuesta: 44,1 m]*
- ▣ ¿Experimentará la piedra el mismo desplazamiento en el primer segundo de subida que en el último segundo? ¿Por qué? Puedes utilizar la tabla de valores.
- ▣ Una vez que ha llegado al punto más alto, la piedra inicia el descenso. Responde ahora a la misma pregunta que en el apartado anterior.

## 6. ESTUDIO DE LOS MOVIMIENTOS EN EL PLANO

El modelo de libro de trabajo de nombre **MovimientoPlano.xls**, está diseñado para el estudio de los movimientos en el plano. En la hoja DATOS hay que introducir las componentes X e Y de la posición, de la velocidad y de la aceleración. Se obtiene la tabla de valores de las posiciones y las velocidades, así como de la rapidez y la distancia al sistema de referencia. Las hojas POSICIONES, VELOCIDADES y TRAYECTORIA contienen las gráficas *posiciones/tiempo* y *velocidades/tiempo* y el trazado de la trayectoria, respectivamente. Se consigue un efecto *zoom* modificando el contenido de la celda G6. Para el análisis puedes utilizar tanto la **tabla de valores** -hoja DATOS- como los **gráficos asociados** -hojas POSICIONES, VELOCIDADES y TRAYECTORIA-.

### ⇒ Explicación del modelo

- ☐ Abre el libro de trabajo MOVIMIENTOPLANO.XLS y observa sus elementos más significativos.
  - En el rango A2..D5 se introducen la posición, la velocidad y la aceleración en el instante  $t = 0$  s, tanto en el eje X como en el eje Y. En nuestro caso, el móvil se encuentra inicialmente en la posición dada por la componente:  $y_0 = -10$  (m), lleva la velocidad de componentes:  $v_{x0} = -2$  (m/s),  $v_{y0} = 4$  (m/s) y carece de aceleración.
  - En la celda G6 se introduce el incremento temporal entre dos posiciones sucesivas del móvil (en nuestro caso, 1 s). En la columna A están los valores del tiempo con el incremento citado.
- ☐ Observa que el gráfico de las posiciones se extiende hasta el instante  $t = 23$  s. Podemos estudiar un intervalo temporal más corto modificando el contenido de la celda G6. Introduce sucesivamente en dicha celda los valores 0,5, 0,2 y 0'1 s. Se obtiene un efecto *zoom*: es como si cada vez ampliásemos una zona de la gráfica.
- ☐ Haz lo mismo con los gráficos de las velocidades y de la trayectoria.

### ⇒ Actividad 24

- ☐ Abre el libro de trabajo MOVIMIENTOPLANO.XLS e introduce las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}x_0 &= -3 \text{ (m)}, y_0 = 2 \text{ (m)} \\v_{x0} &= 5 \text{ (m/s)}, v_{y0} = 12 \text{ (m/s)} \\a_{x0} &= 0, a_{y0} = -1 \text{ (m/s}^2\text{)}\end{aligned}$$

- ☐ ¿En qué instante la componente Y de la velocidad es nula? ¿Cuánto vale la rapidez en ese momento? ¿Es máxima o mínima? [*Respuesta: 12 s; 5 m/s; mínima*]
- ☐ Analiza el tipo de trayectoria que describe el móvil. [*Respuesta: Parabólica, con un máximo en el punto (57 m, 74 m)*]

### ⇒ Actividad 25

- ☐ Abre el libro de trabajo MOVIMIENTOPLANO.XLS e introduce las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}x_0 &= 50 \text{ (m)}, y_0 = -100 \text{ (m)} \\v_{x0} &= 0, v_{y0} = 20 \text{ (m/s)} \\a_{x0} &= 3 \text{ (m/s}^2\text{)}, a_{y0} = 0\end{aligned}$$

- ☐ ¿En qué instante coinciden los valores de las dos componentes de la velocidad? [*Respuesta: 6,67 s*]
- ☐ ¿En qué instante  $y = 0$  m? ¿Cuál es el vector velocidad en ese momento? [*Respuesta: 5 s,  $v_x = 15$  m/s,  $v_y = 20$  m/s*]

## ⇒ Actividad 26

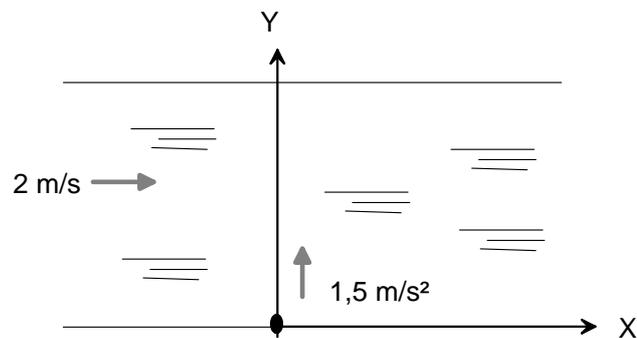
- ☐ Abre el libro de trabajo MOVIMIENTOPLANO.XLS e introduce las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}x_o &= 0 \text{ (m)}, y_o = 0 \text{ (m)} \\v_{x_o} &= 6 \text{ (m/s)}, v_{y_o} = -8 \text{ (m/s)} \\a_{x_o} &= -2 \text{ (m/s}^2\text{)}, a_{y_o} = 4 \text{ (m/s}^2\text{)}\end{aligned}$$

- ☐ ¿Qué tipo de trayectoria describe el móvil? Acuérdate del efecto *zoom*. [Respuesta: Es una parábola de eje oblicuo]
- ☐ Determina cuáles son los vectores de posición, velocidad y aceleración cuando  $x=0$  por segunda vez. [Respuesta: Ocurre en el instante  $t = 6$  s; posición=(0, 24 m), velocidad=(-6 m/s, 16 m/s), aceleración=(-2 m/s<sup>2</sup>, 4 m/s<sup>2</sup>)]

## ⇒ Actividad 27

Para atravesar un río de 300 m de anchura, una lancha inicia su movimiento, con la ayuda de un motor, con una aceleración de 1,5 m/s<sup>2</sup> en una dirección perpendicular al movimiento de la corriente de agua. La rapidez del agua, respecto a la orilla, es de 2 m/s. El movimiento de la lancha es la superposición de los dos movimientos citados.



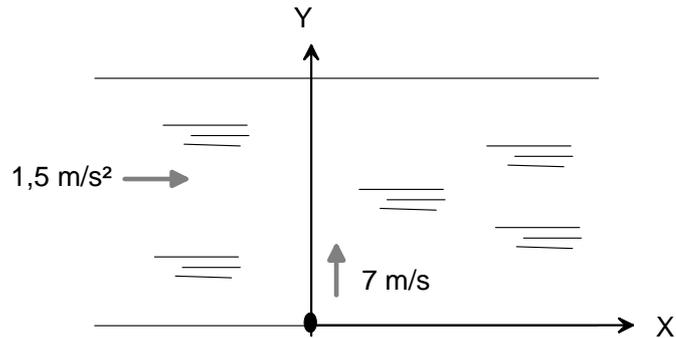
Las condiciones iniciales del movimiento son, pues, las siguientes:

$$\begin{aligned}x_o &= 0 \text{ (m)}, y_o = 0 \text{ (m)} \\v_{x_o} &= 2 \text{ (m/s)}, v_{y_o} = 0 \text{ (m/s)} \\a_{x_o} &= 0, a_{y_o} = 1,5 \text{ (m/s}^2\text{)}\end{aligned}$$

- ☐ Abre el libro de trabajo MOVIMIENTOPLANO.XLS e introduce los datos iniciales de este movimiento.
- ☐ Calcula el tiempo invertido en atravesar el río y en punto de la otra orilla al que llega. [Respuesta: 20 s, 40 m]
- ☐ ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra cuando llega a la otra orilla? [Respuesta: 302,65 m]
- ☐ Analiza el tipo de trayectoria.

## ⇒ Actividad 28

Para atravesar un río de 300 m de anchura, una lancha inicia su movimiento, con la ayuda de un motor, con una rapidez de 7 m/s en una dirección perpendicular al movimiento de la corriente de agua. Se está produciendo una riada, por lo que el agua lleva, respecto a la orilla, una aceleración de 1,5 m/s<sup>2</sup>. El movimiento de la lancha es la superposición de los dos movimientos citados.



Las condiciones iniciales del movimiento son, pues, las siguientes:

$$x_o = 0 \text{ (m)}, y_o = 0 \text{ (m)}$$

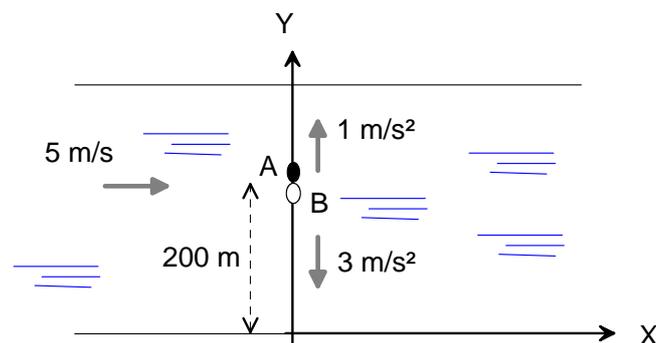
$$v_{x_o} = 0 \text{ (m/s)}, v_{y_o} = 7 \text{ (m/s)}$$

$$a_{x_o} = 1,5 \text{ (m/s}^2\text{)}, a_{y_o} = 0$$

- ▣ Abre el libro de trabajo MOVIMIENTOPLANO.XLS e introduce los datos iniciales de este movimiento.
- ▣ Calcula el tiempo invertido en atravesar el río y en punto de la otra orilla al que llega.  
[Respuesta: 42,86 s, 1377,73 m]
- ▣ ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra cuando llega a la otra orilla?  
[Respuesta: 1410 m]
- ▣ Analiza el tipo de trayectoria y compárala con la de la actividad anterior.

## ⇒ Actividad 29

En la parte central de un río, de 300 m de anchura, dos piraguas inician sus movimientos hacia las orillas en una dirección perpendicular al movimiento de la corriente de agua y en sentidos opuestos. La piragua A tiene una aceleración de 1 m/s<sup>2</sup> y la piragua B una aceleración de 3 m/s<sup>2</sup>. Los sentidos de las aceleraciones se muestran en la figura. La rapidez del agua, respecto a la orilla, es de 5 m/s. El movimiento de cada una de las piraguas es la superposición de los dos movimientos citados.



Las condiciones iniciales de los movimientos son, pues, las siguientes:

$$\text{Piragua A: } y_o = 200 \text{ m}, v_{x_o} = 5 \text{ m/s}, a_{y_o} = 1 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Piragua B: } y_o = 200 \text{ m}, v_{x_o} = 5 \text{ m/s}, a_{y_o} = -3 \text{ m/s}^2$$

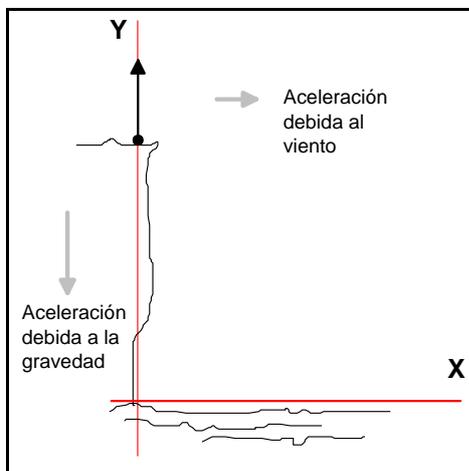
- ▣ Abre el libro de trabajo MOVIMIENTOPLANO.XLS.

- ☐ Introduce, para cada una de las piraguas, los datos iniciales y calcula el tiempo invertido en llegar a la orilla que tiene enfrente y en qué punto lo hará. [Respuesta: 14,14 s, 70,7 m; 11,55 s, 57,75 m]
- ☐ ¿Qué piragua llega antes a la orilla que tiene enfrente?

### ⇒ Actividad 30

Desde un acantilado de 80 m de altura sobre el mar, se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una rapidez de 20 m/s. Existe un fuerte viento que provoca en la piedra una aceleración horizontal de 2 m/s<sup>2</sup>. Para el valor absoluto de la aceleración de la gravedad se puede tomar 10 m/s<sup>2</sup>.

- ☐ Abre el libro de trabajo MOVIMIENTOPLANO.XLS e introduce los datos iniciales de este movimiento -ver la figura-.
- ☐ ¿En qué instante la componente Y de la velocidad es nula? ¿Cuánto vale la rapidez en ese momento? [Respuesta: 2 s, 4 m/s]
- ☐ ¿A qué distancia de la base del acantilado cae la piedra en el mar? [Respuesta: 41,86 m]
- ☐ Analiza la trayectoria que lleva el móvil en dos casos: con viento y sin viento.



## 7. LANZAMIENTO DE PROYECTILES

El modelo de libro de trabajo de nombre **Lanzamientos.xls**, que va a ser utilizado para el estudio del lanzamiento de proyectiles, es casi igual al empleado en el estudio del movimiento en el plano, por lo que sus características resultarán familiares. Existen, no obstante, dos diferencias: las componentes de la velocidad inicial se calculan ahora a partir de las características del tiro **-ángulo de tiro y rapidez de lanzamiento** (rango A2:C4)- y las componentes de la aceleración son siempre las mismas ( $a_x = 0$  y  $a_y = -9,8$  m/s<sup>2</sup>). Para el análisis puedes utilizar tanto la **tabla de valores** como los **gráficos asociados**.

### ⇒ Explicación del modelo

Desde un avión que vuela horizontalmente, a 500 m de altura, con una rapidez de 200 m/s se deja caer un paquete de víveres.

- ☐ Abre el libro de trabajo denominado LANZAMIENTOS.XLS y observa que los datos iniciales son los del enunciado.
- ☐ ¿Cuánto tarda en llegar al suelo? Vemos que para  $t = 10$  s,  $y = 10$  m y que para  $t = 11$  s,  $y = -92,9$  m. Por lo tanto, llega al suelo en un instante del intervalo [10 s, 11 s]. Puedes

aproximarte más a la solución introduciendo el valor 10 s como instante inicial (celda A10) y 0,1 s como incremento temporal (celda G6). Vemos ahora que llega al suelo en el intervalo [10,1 s, 10,2 s] ¿Puedes precisar más la respuesta? [Respuesta: 10,10 s]

- ☐ ¿Cuál ha sido el desplazamiento horizontal del paquete de víveres? [Respuesta: 2020 m]
- ☐ ¿Con qué velocidad y rapidez llega el paquete al suelo? [Respuesta:  $v_x=200$  m/s,  $v_y=-98,98$  m/s,  $v=223,15$  m/s]
- ☐ En cualquier caso, puedes consultar los gráficos.
- ☐ Cierra el libro de trabajo sin guardar los cambios.

### ⇒ Actividad 31

---

Desde la cima de un precipicio se lanza un pedrusco con una velocidad horizontal de 30 m/s y tarda 7 s en llegar al suelo. En el fondo del barranco existe un pueblo cuya primera casa se encuentra a 150 m de la base del precipicio.

- ☐ Abre el libro de trabajo LANZAMIENTOS.XLS e introduce los datos iniciales para este lanzamiento.
- ☐ Calcula, mediante pruebas sucesivas, la altura del precipicio. [Respuesta: 240,1 m]
- ☐ ¿Cuál es el desplazamiento horizontal del pedrusco? ¿Caerá en el pueblo? [Respuesta: 210 m]
- ☐ Da una explicación de cómo varía la distancia del pedrusco al origen mientras se encuentra en el aire.

### ⇒ Actividad 32

---

Se lanza una pelota al aire con una rapidez inicial de 20 m/s formando un ángulo de 53° con la horizontal. Se supone despreciable la influencia del aire.

- ☐ Abre el libro de trabajo LANZAMIENTOS.XLS e introduce los datos iniciales para este lanzamiento.
- ☐ Halla la altura máxima y el tiempo que la pelota está subiendo. [Respuesta: 13,02 m, 1,63 s]
- ☐ ¿Cuál es el alcance horizontal? ¿Cuánto tiempo está la pelota en el aire? [Respuesta: 39,24 m; 3,26 s]
- ☐ Da una explicación de cómo varían, en función del tiempo, las componentes de la velocidad y la rapidez durante el intervalo en el que la pelota está en el aire.

### ⇒ Actividad 33

---

Desde lo alto de un acantilado de 50 m de altura se dispara un proyectil con una rapidez inicial es de 200 m/s en una dirección que forma un ángulo de 27° con la horizontal.

- ☐ Abre el libro de trabajo LANZAMIENTOS.XLS e introduce los datos iniciales para este lanzamiento.
- ☐ Calcula la altura máxima, medida desde el fondo del acantilado, y el tiempo que el proyectil está subiendo. [Respuesta: 470,63 m, 9,27 s]
- ☐ ¿Cuál es la velocidad del proyectil cuando pasa a la altura del punto de lanzamiento? [Respuesta:  $v_x=178,2$  m/s,  $v_y=-90,8$  m/s]
- ☐ Determina el alcance horizontal y el tiempo que el proyectil está en el aire. [Respuesta: 3398,3 m, 19,07 s]